

Curs 3

Programarea liniară: analiza de sensibilitate și interpretarea soluției

Modelarea și analiza datelor pentru decizii de management

Conf.dr.ing. Lăcrimioara GRAMA

Anul 2 master · Tehnologii, Sisteme și Aplicații pentru eActivități

Facultatea de Electronică, Telecomunicații și Tehnologia Informației
Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca



Cursul precedent

Introducere în programarea liniară

- ✓ Programarea liniară
- ✓ Formularea problemei și metoda grafică
- ✓ Problemă LP de maximizare și minimizare
 - ✓ Modelul matematic
 - ✓ Metoda grafică
- ✓ Variabile de reducere și variabile de surplus
- ✓ Situații speciale în problemele LP
 - ✓ Soluții optime alternative
 - ✓ Soluții nefezabile
 - ✓ Soluții nemărginite



Obiectivele cursului

La finalul acestui curs, studenții vor putea să:

- explice rolul analizei de senzitivitate în interpretarea soluției optime a unui model LP
- determine grafic plaja de optimalitate pentru coeficienții funcției obiectiv
- interpreteze efectul modificării valorilor din membrul drept al constrângerilor
- explice semnificația valorii duale / prețului umbră
- distingă între costuri relevante și costuri irecuperabile în formularea unui model LP
- identifice limitele analizei de senzitivitate clasice

Cuprins

Introducere în analiza de sensibilitate

Analiza de sensibilitate prin metoda grafică

- Coeficienții funcției obiectiv
 - Plaja de optimalitate
- Valorile din membrul drept al constrângerilor
 - Valoarea duală / prețul umbră
 - Costuri relevante și costuri nerecuperabile

Limitări ale analizei de sensibilitate clasice

- Modificări simultane
- Modificări ale coeficienților tehnologici ai constrângerilor
- Valori duale cu interpretare neintuitivă

Rezumat

Introducere în analiza de sensibilitate

Analiza de sensibilitate (analiza post-optimizare)

Arată cum se modifică soluția optimă și valoarea funcției obiectiv atunci când se schimbă datele de intrare ale modelului LP

În acest curs analizăm modificarea coeficienților funcției obiectiv și valorilor din membrul drept al constrângerilor



Utilitate managerială

Analiza de sensibilitate ajută la evaluarea riscurilor și la verificarea robusteții deciziei

- Identifică parametrii care influențează cel mai mult soluția optimă
- Arată dacă soluția rămâne validă când datele estimate se modifică

Utilizare în proiecte

Este folosită frecvent în evaluarea proiectelor de investiții

- După realizarea studiului de fezabilitate și a analizei tehnico-economice
- Pentru verificarea deciziei în scenarii diferite

Principiul analizei de sensibilitate

Principiul analizei

Se modifică un singur factor la un moment dat, iar ceilalți factori rămân fixați la valorile de bază. Astfel se poate observa efectul fiecărui parametru asupra soluției optime și asupra valorii funcției obiectiv.

Întrebarea-cheie

Ce s-ar întâmpla dacă ...?

- profitul unitar s-ar modifica?
- resursele disponibile ar crește sau ar scădea?
- cererea minimă s-ar modifica?

Context managerial

Analiza este importantă deoarece deciziile sunt luate într-un mediu dinamic, cu date estimate sau incerte.

Exemple:

- prețurile materiilor prime se pot schimba
- cererea de produse se poate modifica
- capacitatea de producție poate varia
- costurile pot varia, iar disponibilitatea forței de muncă poate fluctua

Problema de bază pentru analiza de sensibilitate

Ex: Firma X produce geți de voiaj. În urma discuțiilor cu un distribuitor important, managerul firmei are oportunitatea de a introduce pe piață două modele noi: geți standard și geți de lux. Distribuitorul este dispus să cumpere producția realizată în următoarele trei luni.

Producerea fiecărei geți implică patru operații: croire și vopsire, coasere, finisare, respectiv verificare și ambalare. Numărul de ore disponibile în fiecare departament este limitat. După analiza previziunii volumului de muncă, managerul de producție estimează că, pentru următoarele trei luni, sunt disponibile 630 ore pentru croire și vopsire, 600 ore pentru coasere, 708 ore pentru finisare și 135 ore pentru verificare și ambalare.

Analizând procesul de fabricație, managerul constată că:

- Pentru o geantă standard sunt necesare: $7/10$ ore pentru croire și vopsire, $1/2$ ore pentru coasere, 1 oră pentru finisare și $1/10$ ore pentru verificare și ambalare.
- Pentru o geantă de lux sunt necesare: 1 oră pentru croire și vopsire, $5/6$ ore pentru coasere, $2/3$ ore pentru finisare și $1/4$ ore pentru verificare și ambalare.

Departamentul de contabilitate a estimat, pe baza costurilor variabile relevante, că fiecare geantă standard aduce o contribuție la profit de 10 lei, iar fiecare geantă de lux aduce o contribuție la profit de 9 lei.

Obiectivul firmei este de a determina numărul optim de geți standard și de geți de lux care trebuie produse în următoarele trei luni, astfel încât profitul total să fie maxim.

Ce se întâmplă dacă se modifică profitul unitar?

➤ Modelul matematic

$$\begin{array}{llllll} \text{Max} & 10S & + & 9L & & \text{(funcția obiectiv)} \\ \text{s. t.} & \frac{7}{10}S & + & 1L & \leq & 630 \quad \text{(croire și vopsire)} \\ & \frac{1}{2}S & + & \frac{5}{6}L & \leq & 600 \quad \text{(coasere)} \\ & 1S & + & \frac{2}{3}L & \leq & 708 \quad \text{(finisare)} \\ & \frac{1}{10}S & + & \frac{1}{4}L & \leq & 135 \quad \text{(verificare și ambalare)} \\ & S, & & L & \geq & 0 \quad \text{(nenegativitate)} \end{array}$$

Soluția optimă inițială, $S = 540$ geți standard și $L = 252$ geți de lux, a fost obținută pentru o contribuție la profit de 10 lei/geantă standard și 9 lei/geantă de lux

- Presupunem că, ulterior, contribuția la profit pentru o geantă standard scade la **8.5 lei**, în timp ce contribuția la profit pentru o geantă de lux rămâne **9 lei**

Întrebarea de sensibilitate

Dacă profitul unitar al geții standard scade de la 10 lei la 8.5 lei, soluția inițială $S = 540$, $L = 252$ mai este optimă?

Analiza de sensibilitate ne ajută să răspundem la această întrebare fără a rezolva de la zero problema LP modificată: $\max \quad 8.5S + 9L$

De ce este utilă analiza de sensibilitate?

- Analiza de sensibilitate poate fi utilizată pentru a identifica parametrii critici ai modelului LP

Ex: Managerul consideră că profitul de **9 lei/geantă de lux** este doar o estimare aproximativă a contribuției la profit

Scenariul 1

Dacă soluția $S = 540$, $L = 252$ rămâne optimă pentru valori ale contribuției la profit a genții de lux între **6.67 lei** și **14.29 lei**, atunci estimarea de **9 lei** este relativ sigură

Managerul poate avea încredere în programul de producție recomandat

Scenariul 2

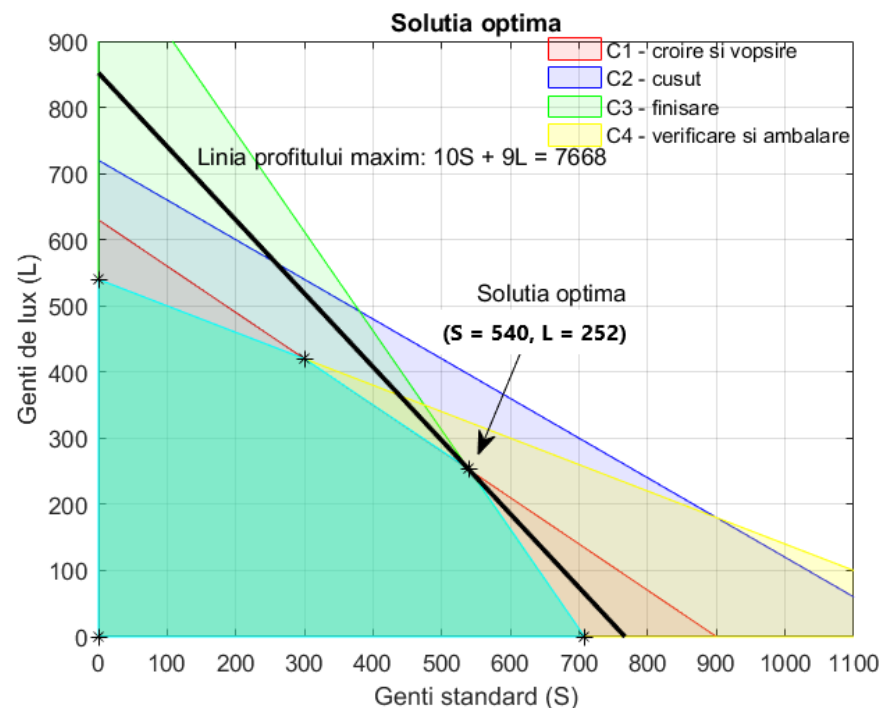
Dacă soluția $S = 540$, $L = 252$ rămâne optimă numai pentru contribuții între **8.90 lei** și **9.10 lei**, atunci estimarea de **9 lei** este sensibilă la modificări

Managerul ar trebui să verifice mai atent această estimare

Idee-cheie: analiza de sensibilitate arată cât de mult pot varia datele estimate fără ca soluția optimă să se schimbe

Ce se întâmplă dacă se modifică resursele disponibile?

- Un alt aspect al analizei de senzitivitate se referă la modificarea valorilor din membrul drept al constrângerilor, adică la modificarea resurselor disponibile
 - În problema cu gențile de voiaj, soluția optimă a fost obținută folosind tot timpul disponibil din departamentul de croire și vopsire și din departamentul de finisare



➤ Timpii de producție utilizați în soluția optimă inițială:

- **Croire și vopsire:** $7/10 \cdot 540 + 252 = 630$ (0 ore nefolosite)
- **Coasere:** $1/2 \cdot 540 + 5/6 \cdot 252 = 480$ (**120** ore nefolosite)
- **Finisare:** $540 + 2/3 \cdot 252 = 708$ (0 ore nefolosite)
- **Verificare și ambalare:** $1/10 \cdot 540 + 1/4 \cdot 252 = 117$ (**18** ore nefolosite)

Întrebarea de senzitivitate

Ce s-ar întâmpla cu soluția optimă și cu profitul maxim dacă firma ar putea obține ore suplimentare pentru una dintre resurse?

Analiza de senzitivitate arată cât valorează o oră suplimentară din fiecare resursă și pentru ce interval această valoare marginală rămâne valabilă

Cuprins

Introducere în analiza de sensibilitate

Analiza de sensibilitate prin metoda grafică

- Coeficienții funcției obiectiv
 - Plaja de optimalitate
- Valorile din membrul drept al constrângerilor
 - Valoarea duală / prețul umbră
 - Costuri relevante și costuri nerecuperabile

Limitări ale analizei de sensibilitate clasice

Rezumat

Analiza de senzitivitate prin metoda grafică

- Pentru problemele LP cu două variabile de decizie, poate fi utilizată metoda grafică pentru realizarea analizei de senzitivitate

1

Modificarea coeficienților funcției obiectiv

2

Modificarea valorilor din membrul drept al constrângerilor

Coeficienții funcției obiectiv

- Să luăm în considerare modul în care **modificarea coeficienților funcției obiectiv** ar putea afecta soluția optimă, în cazul problemei cu gețile de voiaj
- Contribuția curentă la profit este 10 lei pentru o geantă standard și 9 lei pentru o geantă de lux
 - O creștere a contribuției la profit pentru una dintre geți ar putea conduce managerul la decizia de a crește producția respectivei geți
 - O scădere a contribuției la profit pentru una dintre geți ar putea conduce managerul la decizia de a scădea producția respectivei geți
- ❑ Cu toate acestea, nu este evident cât de mult trebuie să se modifice contribuția la profit pentru ca soluția optimă inițială să se schimbe
- Soluția optimă inițială este dată de producția a 540 geți standard și 252 geți de lux

Plaja de optimalitate

Plaja de optimalitate (*range of optimality*) este intervalul de valori ale unui coeficient al funcției obiectiv pentru care soluția optimă curentă rămâne optimă, presupunând că ceilalți coeficienți rămân nemodificați

➤ Atenția managerială trebuie concentrată asupra coeficienților funcției obiectiv:

- Care au o plajă îngustă de optimalitate
- A căror valoare estimată este apropiată de limitele intervalului

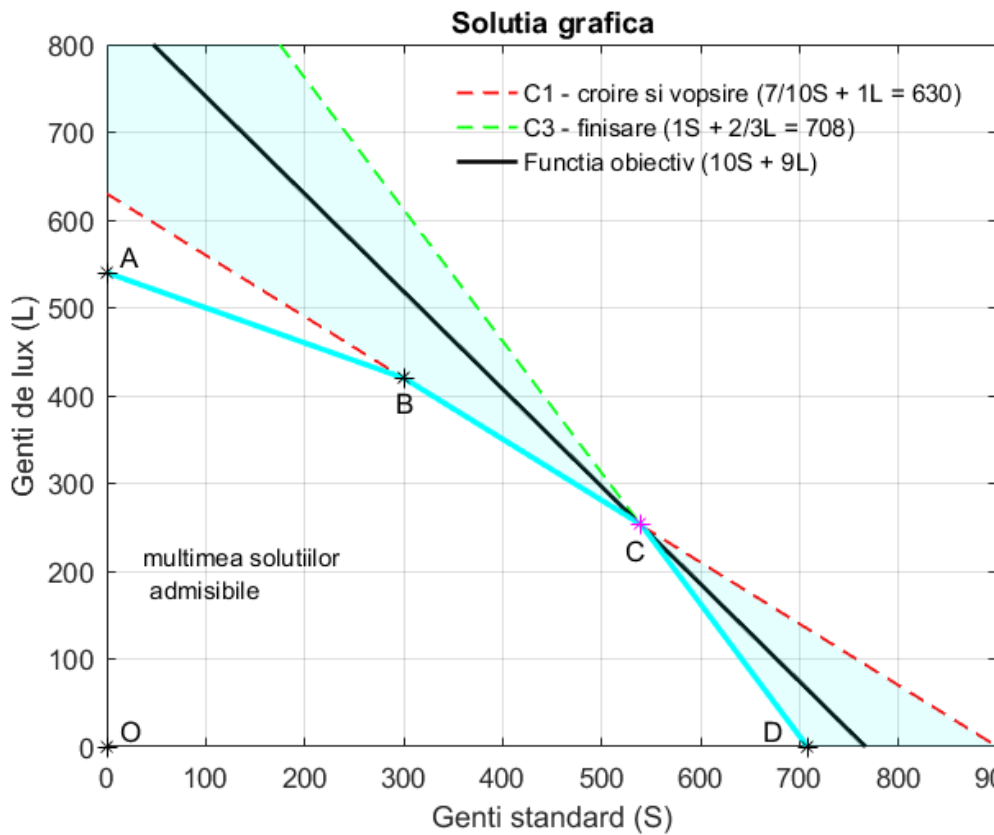
➤ O mică modificare a acestor coeficienți poate duce la necesitatea modificării soluției optime

➤ Să evaluăm plaja de optimalitate pentru problema genților de voiaj



Plaja de optimalitate: interpretare grafică

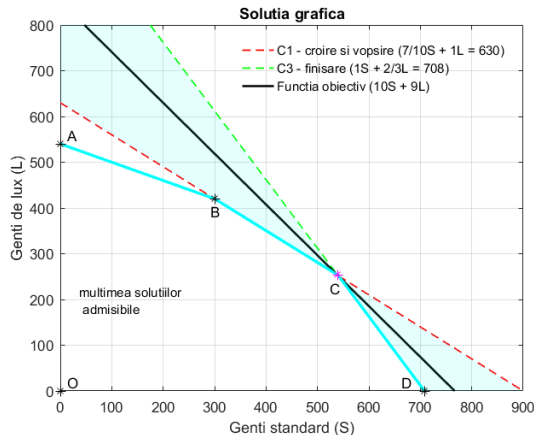
- Grafic, plaja de optimalitate se regăsește modificând panta dreptei funcției obiectiv în limitele pantelor corespunzătoare constrângerilor



- Modificarea coeficientului lui S sau a coeficientului lui L în funcția obiectiv determină modificarea pantei dreptei funcției obiectiv
- Punctul $C(540, 252)$ rămâne optim cât timp dreapta funcției obiectiv se rotește între dreptele active **C1** și **C3**
- Limitele apar când dreapta funcției obiectiv are aceeași pantă cu una dintre constrângerile active

panta dreptei **C3** $\leq$ panta dreptei funcției obiectiv $\leq$ panta dreptei **C1**

Plaja de optimalitate: determinarea limitelor prin pante



➤ Ecuația pentru **C1**

$$\frac{7}{10}S + 1L = 630 \Rightarrow L = -\frac{7}{10}S + 630$$

- panta dreptei **C1**: $-\frac{7}{10}$
- intersecția dreptei **C1** cu dreapta L : 630

➤ Ecuația pentru **C3**

$$1S + \frac{2}{3}L = 708 \Rightarrow L = \underline{\hspace{2cm}}$$

- panta dreptei **C3** $\underline{\hspace{2cm}}$
- intersecția dreptei **C3** cu dreapta L $\underline{\hspace{2cm}}$

➤ Punctul de extrem $C(540, 252)$ reprezintă soluția optimă cât timp
panta **C3** $\leq$ panta funcției obiectiv $\leq$ panta **C1**

$$\underline{\hspace{2cm}} \leq \text{panta funcției obiectiv} \leq \underline{\hspace{2cm}}$$

➤ Forma generală a ecuației pentru funcția obiectiv

$$P = C_S S + C_L L \Rightarrow L = -\frac{C_S}{C_L} S + \frac{P}{C_L}$$

- C_S – profitul corespunzător unei genți standard
- C_L – profitul corespunzător unei genți de lux
- P – valoarea funcției obiectiv

$$\underline{\hspace{2cm}} \leq -\frac{C_S}{C_L} \leq \underline{\hspace{2cm}} \quad (1)$$

Determinarea plajelor de optimalitate pentru C_S și C_L

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{C_S}{C_L} \leq -\frac{7}{10}$$

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$16	Genti Standard	540	0	10	3.5	3.7
\$C\$16	Genti Lux	252	0	9	5.285714286	2.333333333

Microsoft Excel – raport de senzitivitate

Pentru geanta standard ($C_L = 9$)

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{C_S}{9} \leq -\frac{7}{10} \Leftrightarrow 6.3 \leq C_S \leq 13.5$$

Interpretare: contribuția la profit a unei geți standard poate varia între **6.3 lei** și **13.5 lei**, fără ca soluția optimă $S = 540$, $L = 252$ să se schimbe

Pentru geanta de lux ($C_S = 10$)

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{10}{C_L} \leq -\frac{7}{10} \Leftrightarrow 6.67 \leq C_L \leq 14.29$$

Interpretare: contribuția la profit a unei geți de lux poate varia între **6.67 lei** și **14.29 lei**, fără ca soluția optimă $S = 540$, $L = 252$ să se schimbe

Observație: modificări individuale vs. modificări simultane

- Plaja de optimalitate pentru coeficienții funcției obiectiv este aplicabilă direct numai pentru **modificarea unui singur coeficient la un moment dat**, presupunând că ceilalți coeficienți rămân fixați la valorile inițiale



- Dacă doi sau mai mulți coeficienți ai funcției obiectiv se modifică simultan, intervalele de optimalitate calculate individual **nu mai pot fi folosite direct**
 - În cazul metodei grafice, se poate recalcula panta funcției obiectiv

$$-\frac{C_S}{C_L}$$

- Și se verifică dacă noua pantă rămâne între limitele admise

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{C_S}{C_L} \leq -\frac{7}{10}$$

Observații: modificări simultane ale coeficienților $-\frac{3}{2} \leq -\frac{C_S}{C_L} \leq -\frac{7}{10}$ (1)

Ex: Să presupunem că, în urma unor estimări actualizate, contribuția la profit pentru o geantă standard crește de la **10 lei** la **13 lei**, iar contribuția la profit pentru o geantă de lux scade simultan de la **9 lei** la **8 lei**

- Intervalele de optimalitate evaluate anterior sunt: $\begin{cases} 6.3 \leq C_S \leq 13.5 \\ 6.67 \leq C_L \leq 14.29 \end{cases}$
 - Pe baza acestor intervale de optimalitate, modificarea individuală lui C_S la 13 lei, sau a lui C_L la 8 lei nu ar modifica soluția optimă ($S = 540, L = 252$)
 - Totuși, intervalele de optimalitate nu permit concluzii directe pentru modificarea simultană a ambilor coeficienți
- În (1) am arătat că punctul de extrem $C(540, 252)$ rămâne optim cât timp $-\frac{3}{2} \leq -\frac{C_S}{C_L} \leq -\frac{7}{10}$
 - Dacă C_S se modifică la 13 lei și simultan se modifică și C_L la 8 lei, noua pantă a funcției obiectiv devine
$$-\frac{C_S}{C_L} = -\frac{13}{8} = -1.625 < -1.5$$
 - ⇒ Soluția curentă $S = 540, L = 252$ nu mai este optimă
 - Rezolvând din nou problema cu $C_S = 13$ și $C_L = 8$, se obține că punctul de extrem $D(708, 0)$ devine noua soluție optimă

Concluzie: deși fiecare coeficient rămâne în intervalul său individual de optimalitate, modificarea simultană schimbă panta funcției obiectiv și poate schimba soluția optimă

Concluzie: modificări individuale vs. modificări simultane

Modificare individuală

Putem utiliza direct plaja de optimalitate calculată pentru coeficientul modificat

Modificare simultană

Nu putem utiliza direct plajele individuale; trebuie verificată noua pantă a funcției obiectiv

Idee-cheie: plaja de optimalitate oferă concluzii directe numai atunci când se modifică un singur coeficient al funcției obiectiv la un moment dat, ceilalți coeficienți rămânând fixați

Valorile din membrul drept al constrângerilor

Să luăm în considerare modul în care **modificarea valorilor din membrul drept al constrângerilor** (RHS – *right-hand side*) ar putea afecta soluția optimă, în cazul problemei cu gențile de voiaj

Întrebarea de senzitivitate

Ce se întâmplă dacă în departamentul de croire și vopsire sunt disponibile încă 10 ore?

- Membrul drept al constrângerii **C1** crește de la 630 la 640:

$$\frac{7}{10}S + 1L \leq 640$$

⇒ Regiunea fezabilă se extinde

- Verificăm dacă extinderea regiunii fezabile conduce la o valoare mai mare a funcției obiectiv

- Noua soluție optimă este: $S = 527.5, L = 270.75$

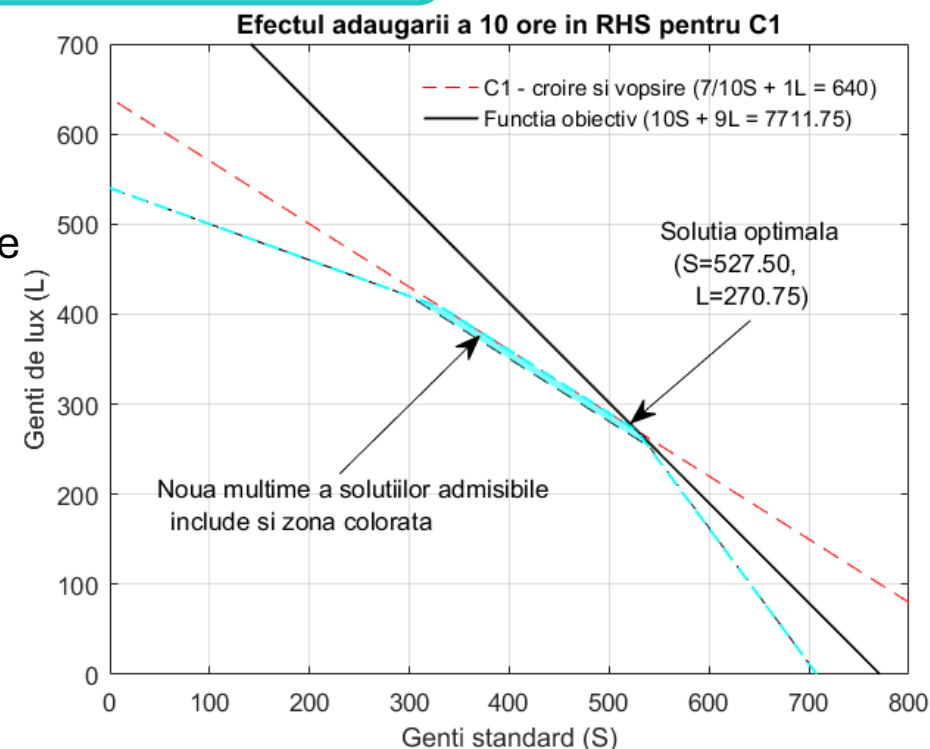
- Noua valoare a funcției obiectiv este:

$$10 \cdot 527.5 + 9 \cdot 270.75 = 7711.75 \text{ lei}$$

- Creșterea profitului este: $7711.75 - 7668.00 = 43.75 \text{ lei}$

- Deci $43.75/10 = 4.375 \text{ lei/oră}$

O oră suplimentară în departamentul de croire și vopsire crește profitul optim cu **4.375 lei**



Valoarea duală / prețul umbră

Valoarea duală / prețul umbră (*dual value / shadow price*) = modificarea valorii optime a funcției obiectiv la creșterea cu o unitate a membrului drept al unei constrângeri



Plaja de fezabilitate (range of feasibility) = intervalul de valori ale membrului drept pentru care valoarea duală rămâne valabilă

- Valoarea duală pentru constrângerea **C1** este **4.375 lei/oră**
 - Dacă RHS-ul constrângerii **C1** crește cu 1 oră, profitul optim crește cu **4.375 lei**
 - Dacă RHS-ul constrângerii **C1** scade cu 1 oră, profitul optim scade cu **4.375 lei**

Observație: prețul umbră se aplică doar pentru modificări ale RHS-ului aflate în plaja de fezabilitate. Pentru modificări mai mari, modelul LP trebuie rezolvat din nou

Valoarea duală / prețul umbră (cont.)

➤ Microsoft Excel – raport de senzitivitate

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$16	Genti Standard	540	0	10	3.5	3.7
\$C\$16	Genti Lux	252	0	9	5.285714286	2.333333333

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$21	Croire si vopsire Ore utilizate (LHS)	630	4.375	630	52.36363636	134.4
\$B\$22	Cusut Ore utilizate (LHS)	480	0	600	1E+30	120
\$B\$23	Finisare Ore utilizate (LHS)	708	6.9375	708	192	128
\$B\$24	Verificare si ambalare Ore utilizate (LHS)	117	0	135	1E+30	18

- Pentru constrângerile neactive, prețul umbră este **0**
- Pentru constrângerea **C1**, prețul umbră este **4.375 lei/oră**
- Pentru constrângerea **C3**, prețul umbră este **6.9375 lei/oră**

Grafic, prețul umbră se poate determina modificând RHS-ul constrângerii cu o unitate și recalculând soluția optimă, presupunând că rămân active aceleași constrângeri

O **constrângere neactivă** are preț umbră 0, deoarece o modificare mică a RHS-ului ei nu modifică soluția optimă și nici valoarea funcției obiectiv. Se modifică doar variabila de reducere/surplus asociată

Într-o problemă de maximizare, un **preț umbră negativ** indică faptul că o creștere a RHS-ului ar reduce valoarea optimă a funcției obiectiv

Costuri relevante și costuri irecuperabile/nerecuperabile

Costuri relevante (pertinente)

Costuri viitoare, care depind de decizia luată și pot fi influențate prin alegerea variabilelor de decizie

- Depind de decizia luată
- Sunt reflectate în coeficienții funcției obiectiv
- se modifică în funcție de nivelul activității/resursei utilizate

Interpretare: dacă resursa are un cost relevant, prețul umbră indică valoarea suplimentară maximă care poate justifica obținerea unei unități suplimentare a resursei

Costuri nerecuperabile (*sunk cost*)

Costuri deja suportate, care nu mai pot fi modificate prin decizii ulterioare

- Nu depind de decizia luată
- Nu trebuie incluse în coeficienții funcției obiectiv
- Trebuie plătite indiferent de soluția aleasă

Ex: costul unei campanii de marketing deja realizate. După ce costul a fost suportat, renunțarea la produs/serviciu nu îl mai poate recupera

Interpretare: costurile nerecuperabile nu trebuie să influențeze alegerea soluției optime

Idee-cheie: în modelul LP trebuie incluse doar costurile relevante; costurile nerecuperabile nu trebuie să influențeze decizia optimă

Costuri relevante și costuri nerecuperabile (cont.)

Ex: Să reconsiderăm problema cu gențile de voiaj

- Timpul pentru croire și vopsire disponibil este de **630 de ore**
 - Costul asociat acestor ore este un **cost nerecuperabil** dacă trebuie plătit indiferent de numărul de genți standard și de lux produse
 - Ar fi un **cost relevant** dacă firma ar plăti numai pentru numărul de ore utilizate efectiv pentru producerea genților
- Toate costurile relevante trebuie reflectate în funcția obiectiv a unui LP
 - De exemplu, dacă plata se face pe oră utilizată, costul orar ar trebui inclus în profitul net/unitate sau în costul unitar
- Costurile nerecuperabile nu trebuie reflectate în funcția obiectiv
 - Am presupus că firma trebuie să plătească salariile angajaților indiferent dacă timpul disponibil este utilizat integral sau nu
 - Prin urmare, costul fix al resursei de muncă disponibile este un cost nerecuperabil și nu trebuie reflectat în funcția obiectiv

Idee-cheie: în funcția obiectiv includem doar costurile care se modifică în funcție de decizia luată; costurile deja suportate sau fixe nu trebuie să influențeze soluția optimă

Performance Analysis Corporation utilizează metode ale științei managementului pentru proiectarea și evaluarea unor operațiuni eficiente în lanțuri de magazine

O aplicație a programării liniare este evaluarea eficienței relative a unităților unui lanț de restaurante fast-food

Criteriu de ineficiență relativă

Conform conceptului de **eficiență Pareto**², un restaurant este relativ ineficient dacă există restaurante comparabile care:

- 1) Funcționează în condiții similare sau mai dificile
- 2) Obține cel puțin același nivel al rezultatelor
- 3) Utilizează cel mult aceleași resurse, iar cel puțin una dintre resurse este utilizată într-o cantitate mai mică

Pentru a identifica restaurantele relativ ineficiente, Performance Analysis Corporation a formulat și a rezolvat un model LP

Modelul LP include

- Constrângeri privind nivelurile minime acceptabile ale rezultatelor
- Condiții impuse de factorii necontrolabili din mediu
- O funcție obiectiv care minimizează resursele necesare pentru obținerea rezultatelor

Modelul LP oferă

- 1) Un scor de eficiență tehnică relativă
- 2) Ajustările necesare ale resurselor sau ale rezultatelor pentru ca restaurantul ineficient să devină eficient
- 3) Un grup de restaurante comparabile, folosit ca reper managerial

Evaluarea eficienței la Performance Analysis Corporation¹

¹Richard C. Morey of Performance Analysis Corporation

²Eficiență Pareto: un restaurant este eficient Pareto dacă nu există un alt restaurant sau o combinație de restaurante comparabile care să obțină cel puțin aceleași rezultate folosind cel mult aceleași resurse, cu o îmbunătățire strictă la cel puțin un indicator. Un restaurant este relativ ineficient dacă poate fi identificat un reper care produce aceleași rezultate cu mai puține resurse sau rezultate mai bune cu aceleași resurse

Analiza de sensibilitate oferă informații manageriale importante

- Pentru fiecare constrângere asociată unui nivel minim acceptabil al rezultatelor, valoarea duală indică modul în care s-ar modifica valoarea funcției obiectiv / scorul de eficiență dacă acel nivel minim ar crește cu o unitate
- În aplicația Performance Analysis Corporation, analiza identifică de obicei **40%–50% dintre restaurante** ca fiind relativ ineficiente, ținând cont de intrările disponibile și de ieșirile produse
- Dacă ineficiențele relative identificate sunt eliminate simultan, profitul corporativ poate crește cu aproximativ **5%–10%**
 - Această creștere este semnificativă, având în vedere amploarea operațiunilor implicate

Idee-cheie: analiza de sensibilitate nu indică doar soluția optimă, ci și impactul managerial al modificării cerințelor, resurselor sau nivelurilor minime de performanță

Evaluarea eficienței la Performance Analysis Corporation¹

¹Richard C. Morey of Performance Analysis Corporation

Cuprins

Introducere în analiza de senzitivitate

Analiza de senzitivitate prin metoda grafică

Limitări ale analizei de senzitivitate clasice

- Modificări simultane
- Modificări ale coeficienților tehnologici ai constrângerilor
- Valori duale cu interpretare neintuitivă

Rezumat

Limitări ale analizei de sensibilitate clasice

- Analiza de sensibilitate clasică oferă informații utile despre sensibilitatea soluției optime la variația unor parametri de intrare
- Totuși, informațiile furnizate de majoritatea pachetelor software sunt valabile, în general, pentru modificarea unui singur parametru la un moment dat

1

Modificarea simultană a datelor de intrare

2

Modificarea coeficienților tehnologici ai constrângerilor

3

Valori duale cu interpretare neintuitivă

Modificări simultane ale datelor de intrare

- Informațiile clasice de senzitivitate se bazează pe ipoteza că se modifică un singur parametru la un moment dat, iar ceilalți parametri rămân la valorile inițiale
 - ⇒ Analiza plajei de optimalitate a coeficienților funcției obiectiv și analiza plajei de fezabilitate a valorilor din membrul drept al constrângerilor se aplică doar când **se modifică un singur parametru la un moment dat**
- În multe cazuri însă, suntem interesați de ce s-ar întâmpla dacă **două sau mai multe date de intrare** s-ar modifica simultan

Intrebare-cheie: ce se întâmplă dacă mai multe date de intrare se modifică simultan?

Modificări simultane ale datelor de intrare (cont.)

Ex: Considerăm din nou problema cu gențile de voiaj

+ Să presupunem că **conducerea firmei** are în vedere producerea unui nou model: **un sac de golf**. Departamentul de proiectare estimează că fiecare sac de golf necesită **4/5 ore** pentru croire și vopsire, **1 oră** pentru coasere, **1 oră** pentru finisare și **1/4 ore** pentru verificare și ambalare.

Se estimează o contribuție la profit de **12.85 lei** pentru fiecare sac de golf produs în perioada curentă.

➤ Modelul matematic

Max	$10S$	$+9L$	$+12.85G$		(funcția obiectiv)
s. t.	$\frac{7}{10}S$	$+1L$	$+\frac{4}{5}G$	≤ 630	(croire și vopsire)
	$\frac{1}{2}S$	$+\frac{5}{6}L$	$+1G$	≤ 600	(cusut)
	$1S$	$+\frac{2}{3}L$	$+1G$	≤ 708	(finisare)
	$\frac{1}{10}S$	$+\frac{1}{4}L$	$+\frac{1}{4}G$	≤ 135	(verificare și ambalare)
	$S,$	$L,$	G	≥ 0	(nenegativitate)

Întrebarea de senzitivitate

Este avantajos să introducem producția sacilor de golf în planul optim?

Modificări simultane ale datelor de intrare (cont.)

➤ Soluția optimă presupune producția a

- **280** genți standard
- **0** genți de lux
- **428** saci de golf

Cell	Objective Name	Value
\$B\$18	Maximizare profit total	8299.80

Profit: **8299.8 lei**

Costuri reduse = 0, deoarece variabilele de decizie corespunzătoare au deja valori pozitive în soluția optimă

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$16	Genti Standard	280	0	10	2.07	4.86
\$C\$16	Genti Lux	0	-1.15	9	1.15	1E+30
\$D\$16	Genti Golf	428	0	12.85	12.15	0.940909091

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$21	Croire si vopsire Ore utilizate (LHS)	538.4	0	630	1E+30	91.6
\$B\$22	Cusut Ore utilizate (LHS)	568	0	600	1E+30	32
\$B\$23	Finisare Ore utilizate (LHS)	708	8.1	708	144.6315789	168
\$B\$24	Verificare si ambalare Ore utilizate (LHS)	135	19	135	9.6	64.2

Dacă producția genților de lux crește de 0 la 1, valoarea funcției obiectiv scade cu **1.15 lei**
Echivalent, contribuția la profit a unei genți de lux ar trebui să crească cu **1.15 lei** pentru ca producerea acestui tip de geantă să devină atractivă în soluția optimă

Modificări simultane ale datelor de intrare (cont.)

➤ Soluția optimă presupune producția a

- **403.78** genți standard
- **222.81** genți de lux
- **155.68** saci de golf

Dacă profitul pentru o geantă de lux crește puțin peste prag, de exemplu la $9 + 1.16 = 10.16$ lei, soluția optimă începe să includă și genți de lux

Maximizare profit total 8302.03

Profit: **8302.03 lei**

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$16	Genti Standard	403.7837838	0	10	2.508571429	0.018
\$C\$16	Genti Lux	222.8108108	0	10.16	5.247894737	0.01
\$D\$16	Genti Golf	155.6756757	0	12.85	0.008181818	2.195

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$21	Croire si vopsire Ore utilizate (LHS)	630	0.024324324	630	52.36363636	91.6
\$B\$22	Cusut Ore utilizate (LHS)	543.2432432	0	600	1E+30	56.75675676
\$B\$23	Finisare Ore utilizate (LHS)	708	8.084594595	708	144.6315789	128
\$B\$24	Verificare si ambalare Ore utilizate (LHS)	135	18.98378378	135	16.15384615	18

Soluția optimă ia în calcul și producția genților de lux

Modificări simultane ale datelor de intrare (cont.)

- Să presupunem că, după rezolvarea problemei, firma identifică un nou furnizor de piele, care permite achiziționarea materialului la un preț mai mic
 - Pielea este o componentă importantă pentru fiecare dintre cele trei produse, dar este utilizată în cantități diferite
- După luarea în considerare a noului cost al pielii, marja de profit pe unitate devine
 - **10.3 lei** pentru o geantă standard
 - **11.4 lei** pentru o geantă de lux
 - **12.97 lei** pentru un sac de golf

Întrebarea de sensibilitate

Dacă noile marje de profit sunt 10.3, 11.4 și 12.97, mai rămâne optim planul de producție obținut anterior?

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$16	Genti Standard	280	0	10	2.07	4.86
\$C\$16	Genti Lux	0	-1.15	9	1.15	1E+30
\$D\$16	Genti Golf	428	0	12.85	12.15	0.940909091

- Rezolvăm modelul folosind noile marje de profit drept coeficienți ai funcției obiectiv
$$\text{Max } 10.3S + 11.4L + 12.97G$$
păstrând același set de constrângeri ca în modelul anterior

Modificări simultane ale datelor de intrare (cont.)

➤ Soluția optimă presupune producția tuturor celor trei produse

- **403.78** genți standard
- **222.81** genți de lux
- **155.68** saci de golf

Profit: **8718.13 lei**

Cell	Objective Name	Value
\$B\$18	Maximizare profit total	8718.13

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$16	Genti Standard	403.7837838	0	10.3	2.08	2.286
\$C\$16	Genti Lux	222.8108108	0	11.4	4.260526316	1.27
\$D\$16	Genti Golf	155.6756757	0	12.97	1.039090909	1.82

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$21	Croire si vopsire Ore utilizate (LHS)	630	3.089189189	630	52.36363636	91.6
\$B\$22	Cusut Ore utilizate (LHS)	543.2432432	0	600	1E+30	56.75675676
\$B\$23	Finisare Ore utilizate (LHS)	708	6.563513514	708	144.6315789	128
\$B\$24	Verificare si ambalare Ore utilizate (LHS)	135	15.74054054	135	16.15384615	18

➤ Dacă nu am fi rezolvat din nou modelul cu noua funcție obiectiv și am fi păstrat soluția modelului anterior, profitul estimat ar fi fost

$$10.3 \cdot 280 + 11.4 \cdot 0 + 12.97 \cdot 428 = 8435.16$$

➤ Rezolvând din nou modelul cu noile date, obținem un plan revizuit, cu un profit mai mare cu

$$8718.13 - 8435.16 = \mathbf{282.97 \text{ lei}}$$

Idee-cheie: plajele de senzitivitate sunt utile pentru modificări individuale; când mai multe date se modifică simultan, soluția trebuie verificată sau modelul trebuie rezolvat din nou

Modificarea coeficienților tehnologici ai constrângerilor

- Analiza de sensibilitate clasică nu oferă informații directe despre efectul modificării unui coeficient din membrul stâng al unei constrângeri

Ex: Considerăm din nou problema cu gețile de voiaj

+ Să presupunem că firma analizează adoptarea unei noi tehnologii care permite eficientizarea procesului de finisare pentru gețile standard. Această tehnologie este dedicată doar geților standard și ar reduce timpul de finisare pentru o geantă standard **de la 1 oră la 1/2 ore**. Tehnologia nu ar avea impact asupra timpului de finisare pentru gețile de lux sau pentru sacii de golf.

- Constrângerea dată de timpul de finisare, în noul scenariu, devine: (C3) $\frac{1}{2}S + \frac{2}{3}L + 1G \leq 708$
- Chiar dacă se modifică un singur coeficient în model, această modificare nu poate fi evaluată direct din raportul clasic de sensibilitate
 - Coeficientul trebuie actualizat, iar modelul trebuie rezolvat din nou

Întrebarea de sensibilitate

Cum se modifică planul optim și profitul dacă timpul de finisare al geților standard scade de la 1 oră la 1/2 ore?

Modificarea coeficienților constrângerilor (cont.)

- Soluția optimă presupune producția a
- **521.05** genți standard – crește față de soluția anterioară
 - **0** genți de lux
 - **331.58** saci de golf – scade față de soluția anterioară

Comparând creșterea profitului cu costul noii tehnologii, managerul poate estima dacă investiția este justificată și în cât timp s-ar putea recupera

Cell	Objective Name	Value
\$B\$18	Maximizare profit total	9471.32

Profitul a crescut de la **8299.8 lei** la **9471.32 lei**

Creșterea profitului, folosind noua tehnologie: **1171.52 lei**

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$16	Genti Standard	521.0526316	0	10	1.24375	4.86
\$C\$16	Genti Lux	0	-6.407894737	9	6.407894737	1E+30
\$D\$16	Genti Golf	331.5789474	0	12.85	12.15	1.421428571

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$21	Croire si vopsire Ore utilizate (LHS)	630	12.78947368	630	30	198
\$B\$22	Cusut Ore utilizate (LHS)	592.1052632	0	600	1E+30	7.894736842
\$B\$23	Finisare Ore utilizate (LHS)	592.1052632	0	708	1E+30	115.8947368
\$B\$24	Verificare si ambalare Ore utilizate (LHS)	135	10.47368421	135	2.5	45

Idee-cheie: această modificare nu schimbă doar „resursa disponibilă”, ci schimbă **modul de consum al resursei**; de aceea, raportul clasic de senzitivitate nu este suficient, iar modelul trebuie rezolvat din nou

Valori duale cu interpretare neintuitivă

- Unele constrângeri de tip relațional, în care o variabilă este impusă în funcție de altă variabilă, pot conduce la valori duale cu interpretare mai puțin intuitivă

Ex: Considerăm din nou problema cu gențile de voiaj

+ Conducerea firmei declară că nu va accepta un plan de producție care nu include genți de lux. Prin urmare, se introduce o constrângere suplimentară: numărul genților de lux trebuie să fie **cel puțin 30% din numărul genților standard** produse.

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$16	Genti Standard	280	0	10	2.07	4.86
\$C\$16	Genti Lux	0	-1.15	9	1.15	1E+30
\$D\$16	Genti Golf	428	0	12.85	12.15	0.940909091

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$21	Croire si vopsire Ore utilizate (LHS)	538.4	0	630	1E+30	91.6
\$B\$22	Cusut Ore utilizate (LHS)	568	0	600	1E+30	32
\$B\$23	Finisare Ore utilizate (LHS)	708	8.1	708	144.6315789	168
\$B\$24	Verificare si ambalare Ore utilizate (LHS)	135	19	135	9.6	64.2

Constrângerea suplimentară

$$(C5) \quad L \geq 0.3S$$

Valori duale cu interpretare neintuitivă (cont.)

➤ Soluția optimă presupune producția a

- **336** genți standard
- **100.8** genți de lux
- **304.8** saci de golf

$$(C5) \quad L \geq 0.3S \Leftrightarrow L - 0.3S \geq 0$$

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$26	Minim genti de lux Ore utilizate (LHS)	0	-1.38	0	101.6756757	84

	Variabile de decizie		
	Standard	Lux	Golf
Genti	336.00	100.80	304.80
Maximizare profit total	8183.88		
Constrangeri	Ore utilizate (LHS)		Ore disponibile
Croire si vopsire	579.84	<=	630
Cusut	556.80	<=	600
Finisare	708.00	<=	708
Verificare si ambalare	135.00	<=	135
Minim genti de lux	100.80	>=	100.8

Profit: **8183.88 lei**

Dacă membrul drept al constrângerii $L - 0.3S \geq 0$ crește cu o unitate, condiția devine

$$L - 0.3S \geq 1 \Leftrightarrow L \geq 0.3S + 1$$

iar profitul optim scade cu **1.38 lei**

Interpretarea prețului umbră: dacă firma impune producerea unei genți de lux în plus față de minimul de 30% din numărul genților standard, profitul optim **scade cu 1.38 lei**

Invers, dacă cerința minimă este relaxată cu o geantă, profitul optim **crește cu 1.38 lei**

Valori duale cu interpretare neintuitivă (cont.)

Constraints						
Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$26	Minim genti de lux Ore utilizate (LHS)	0	-1.38	0	101.6756757	84

Întrebarea de senzitivitate

Ce se întâmplă dacă procentul minim de genți de lux crește de la 30% la 31%?

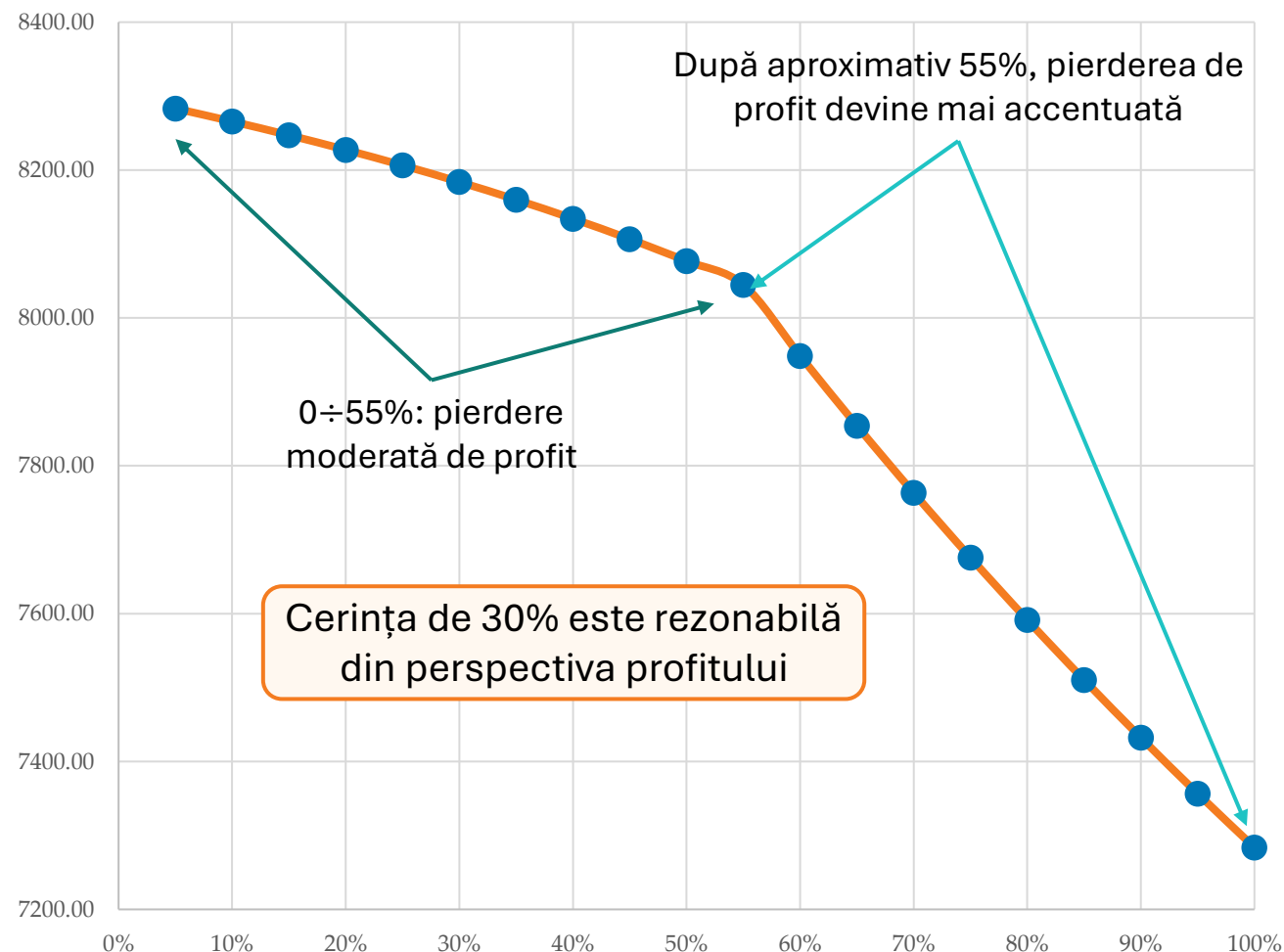
- Raportul clasic de senzitivitate nu oferă direct această informație
 - Prețul umbră se referă la modificarea membrului drept al constrângerii, nu la modificarea coeficientului 0.3
- Pentru a răspunde, trebuie actualizată constrângerea și modelul trebuie rezolvat din nou

$$(C5) \quad L \geq 0.31S$$

Valori duale cu interpretare neintuitivă (cont.)

Procent	Profit	Genți standard	Genți de lux	Saci de golf
5%	8283.24	287.9999	14.4000	410.4000
10%	8265.71	296.4704	29.6470	391.7648
15%	8247.11	305.4543	45.8181	372.0002
20%	8227.35	314.9996	62.9999	351.0002
25%	8206.31	325.1608	81.2902	328.6455
30%	8183.88	335.9993	100.7998	304.8005
35%	8159.89	347.5854	121.6549	279.3110
40%	8134.20	359.9990	143.9996	252.0008
45%	8106.60	373.3321	167.9994	222.6677
50%	8076.87	387.6908	193.8454	191.0783
55%	8044.77	403.1982	221.7590	156.9617
60%	7948.80	396.0000	237.6000	144.0000
65%	7854.27	388.2353	252.3529	132.3529
70%	7763.37	380.7692	266.5385	121.1538
75%	7675.90	373.5849	280.1887	110.3774
80%	7591.67	366.6667	293.3333	100.0000
85%	7510.50	360.0000	306.0000	90.0000
90%	7432.23	353.5714	318.2143	80.3571
95%	7356.71	347.3684	330.0000	71.0526
100%	7283.79	341.3793	341.3793	62.0690

Profitul în funcție de numărul de genți de lux necesare, ca procent din numărul genților standard



În India, ceaiul este vândut atât în pachete, cât și la vrac, pe o piață de aproximativ 1 miliard de dolari

Duncan Industries Limited (DIL), al treilea cel mai mare producător de ceai de pe piața indiană, are vânzări de aproximativ 37.5 milioane de dolari; aproape toate tipurile de ceai sunt vândute în pachete. DIL are 16 grădini de ceai, 3 unități de amestecare, 6 unități de ambalare și 22 de depozite

Procesul include mai multe etape

- 1) **Producerea ceaiului:** ceaiul este obținut în grădinile de ceai
- 2) **Amestecarea:** Ceaiul din grădini este trimis la unitățile de amestecare, unde diferite grade de ceai sunt combinate pentru a obține amestecuri comerciale precum *Sargam*, *Double Diamond* și *Runglee Rungliot*
- 3) **Ambalarea:** ceaiul amestecat este transportat la unitățile de ambalare, unde este introdus în pachete de dimensiuni și forme diferite, rezultând aproximativ 120 de produse
- 4) **Distribuția către depozite și distribuitori:** produsele ambalate sunt expediate către depozite, apoi către distribuitori (11,500) și comercianți cu amănuntul (aproximativ 325,000)

Problemă managerială

Cum pot fi planificate cantitățile produse, ambalate și distribuite astfel încât cererea să fie satisfăcută, iar costurile de transport să fie minime?

Producția și distribuția ceaiului în India²

²Nilotpall Chakravarti, "Tea Company Steeped in OR", *OR/MS Today* (April 2000)

Ce trebuie decis lunar?

Pe baza estimărilor cererii pentru fiecare tip de ceai și pentru fiecare depozit, managerii trebuie să determine:

- 1) Cantitățile de ceai în vrac expediate către fiecare unitate de ambalare
- 2) Cantitățile din fiecare tip de ceai ambalate la fiecare unitate
- 3) Cantitățile de produse finite expediate către fiecare depozit

Procesul manual dura 2–3 zile în fiecare lună și putea conduce la stocuri insuficiente în unele depozite

A fost dezvoltat un model LP cu aproximativ **7000 de variabile de decizie** și **1500 de constrângeri**, având ca obiectiv minimizarea costurile de transport, cu respectarea cererii, a ofertei și a constrângerilor operaționale

Beneficiu managerial

Modelul a permis nu doar optimizarea distribuției, ci și efectuarea de analize de tip „**Ce s-ar întâmpla dacă?**” pentru scenarii alternative

Idee-cheie: în probleme reale de dimensiuni mari, analiza de sensibilitate ajută managerii să testeze rapid scenarii alternative, **fără** a reconstrui complet procesul decizional

Producția și distribuția ceaiului în India²

²Nilotpal Chakravarti, "Tea Company Steeped in OR", *OR/MS Today* (April 2000)

Rezumat

- **Analiza de senzitivitate** arată cum se modifică soluția optimă și valoarea funcției obiectiv atunci când se schimbă datele de intrare ale unui model LP
- Pentru probleme LP cu două variabile de decizie, metoda grafică permite interpretarea modificărilor asupra:
 - coeficienților funcției obiectiv
 - valorilor din membrul drept al constrângerilor
- Raportul de senzitivitate oferă informații importante:
 - plaja de optimalitate
 - valoarea duală / prețul umbra
 - plaja de fezabilitate
- Interpretarea acestor informații este valabilă numai în anumite condiții:
 - de regulă, se modifică un singur parametru la un moment dat
 - pentru modificări simultane sau pentru modificări ale coeficienților tehnologici, modelul trebuie verificat sau rezolvat din nou
- Din perspectivă managerială, analiza de senzitivitate susține întrebări de tip „**Ce s-ar întâmpla dacă?**” și ajută la evaluarea robusteții deciziei optime

Rezumat

Idee-cheie

Analiza de senzitivitate nu oferă doar o soluție optimă, ci ajută managerul să înțeleagă cât de stabilă este decizia în fața schimbării datelor de intrare



Rezumat

Introducere în analiza de senzitivitate

Analiza de senzitivitate prin metoda grafică

- ✓ Coeficienții funcției obiectiv
 - ✓ Plaja de optimalitate
- ✓ Valorile din membrul drept al constrângerilor
 - ✓ Valoarea duală / prețul umbră
 - ✓ Costuri relevante și costuri nerecuperabile

Limitări ale analizei de senzitivitate clasice

- ✓ Modificări simultane
- ✓ Modificări ale coeficienților tehnologici ai constrângerilor
- ✓ Valori duale cu interpretare mai puțin intuitivă

Aplicații manageriale ale programării liniare

- ✓ Evaluarea eficienței la Performance Analysis Corporation
- ✓ Producția și distribuția ceaiului în India

→ Aplicații ale programării liniare: marketing, finanțe